2.3- Additivité pâr rapport au domaine d'intégration :

Soit $A = A_1 \cup A_2$ *où* A_1 *et* A_2 *sont deux parties fermées bornées telles que :*

$$\mu(A_1 \cap A_2) = 0.$$

Alors :

$$\iint_{A} f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{A_1} f(x,y)dxdy + \iint_{A_2} f(x,y)dxdy$$

3- Changement de variables :

3.1- Théorème général :

Soit $f(x, y)$ *une fonction continue sur un domaine D fermé borné en bijection avec un domaine* Δ *fermé borné tels que :*

$$\forall (x,y)\epsilon D: \quad x = \varphi(u,v)$$

$$et \quad y = \psi(u,v) \qquad o\grave{u} \qquad (u,v)\epsilon\Delta$$

Et φ ***et*** ψ ***sont de classe*** C^1

Alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy =$$

$$\iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\; j(\varphi,\psi)(u,v)\;\; dudv$$

Où

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

3.2- Changement de variables affine :

3.2.1- Proposition :

Si : $x = \varphi(u, v) = x_0 + \alpha u + \beta v$

Et $y = \psi(u, v) = y_0 + \gamma u + \delta v$

Alors :

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta$$

Par suite:

$$\iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$\iint_\Delta f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)(\alpha\delta-\gamma\beta)dudv$$

3.2.2- Exemple :

Calculons $\iint_D xydxdy$ **où**

$$D = \begin{Bmatrix} (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2: \quad 0 \leq x+y \leq 1 \\ \\ et \quad -1 \leq 2x - y \leq 2 \end{Bmatrix}$$

est un parallélogramme.

Posons :

$$u = x + y \qquad et \qquad v = 2x - y$$

On trouve donc :

$$x = \varphi(u, v) = \frac{1}{3}(u + v)$$

$$et \qquad y = \psi(u, v) = \frac{1}{3}(2u - v)$$

Et le jacobien est :

$$j(\varphi,\psi)(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

Grâce à ce changement de variables, on va intégrer sur le rectangle :

$$\Delta = \left\{ \begin{matrix} (u,v) \epsilon \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq u \leq 1 \\ \\ et \quad -1 \leq v \leq 2 \end{matrix} \right\}$$

D'où :

$$\iint_D xydxdy$$

$$= \iint_\Delta \frac{1}{9}(u+v)(2u-v)\left(-\frac{1}{3}\right) dudv$$

$$= -\frac{1}{27}\int_0^1 \left(\int_{-1}^2 (2u^2 + uv - v^2)dv\right) du$$

$$= -\frac{1}{27}\int_0^1 \left(6u^2 + \frac{3}{2}u - 3\right) du$$

$$= -\frac{1}{27}\left[2u^3 + \frac{3}{4}u^2 - 3u\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{108}$$

3.3- Changement de variables en coordonnées polaires :

3.3.1- Proposition :

Soit f une fonction continue sur un domaine D fermé borné

en bijection avec un domaine Δ ***fermé borné de***

$$\mathbb{R}_+ \times [a, a + 2\pi]$$

ou $a \epsilon \mathbb{R}$ ***et tels que :***

$$\forall (x, y) \epsilon D: \quad x = r cos\theta$$

$$et \quad y = r sin\theta \qquad o\text{ù} \qquad (r, \theta) \epsilon \Delta$$

Alors :

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$= \iint_\Delta f(rcos\theta, rsin\theta)\mathrm{r}\ drd\theta$$

3.3.2- Exemple :

Soit $D = D(O, R)$

et

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{ll} (r, \theta): & 0 \leq r \leq R \\ \\ et & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

On a bien :

$$\forall (x, y) \epsilon D : \quad x = r cos\theta$$

$$et \quad y = r sin\theta \qquad o\text{ù} \qquad (r, \theta) \epsilon \Delta$$

D'où,

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{r}\ dr\right)d\theta$$

En particulier, pour $f(x,y) = 1$ *on a :*

$$\iint_D dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \mathrm{r}\ dr \right) d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R r dr \right) = \pi R^2$$

D’où,

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(rcos\theta, rsin\theta)\mathrm{r}\ \ dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(rcos\theta, rsin\theta) d\theta \right) rdr$$

En particulier, pour $f(x,y) = 1$ *on a :*

$$\iint_D dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \mathrm{r}\ dr \right) d\theta$$

C’est l’aire du disque D.

<u>4- Calculs des Aires :</u>

<u>4.1- En coordonnées cartésiennes :</u>

<u>4.1.1- Exemple :</u>

Calculons l'aire du domaine Δ délimité par les paraboles d'équations :

$y = x^2$ **et** $y = \sqrt{x}$

$$\Delta = \begin{Bmatrix} (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ et \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \end{Bmatrix}$$

On a alors :

$$\mu(\Delta) = \iint_{\Delta} dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x}^3 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$